Лекция 5. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла и простейшие приемы интегрирования. Определенный интеграл и его свойства

Операция, обратная дифференцированию, называется *интегрированием.* Перейдем к ее изложению.

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Далее в качестве множества A берется любой из промежутков: $[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$ (концы a и b могут быть бесконечными).

Определение 5.1. Говорят, что функция $F(x)$ является *первообразной для функции* $f(x)$ на множестве A, если $F'(x)\equiv f(x)(\forall x\in A)$. Разыскание всех первообразных функции $f(x)$ называется *интегрированием* $f(x)$.

Например, функция $F(x)=x^3$ является первообразной для $f(x)=3x^2$ на всей оси R, так как $\left(x^3\right)'=3x^2(\forall x\in R)$.

Теорема 5.1 (об общем виде всех первообразных данной функции). *Пусть* $F(x)$ *— фиксированная первообразная функции* $f(x)$ *(на множестве* A*). Тогда множество всех первообразных функции* $f(x)$ *(на множестве* A*) описывается формулой*

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

где C *— произвольная постоянная.*

Доказательство вытекает из того, что если $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две первообразные функции $f(x)$, то $\left(\Phi(x)-F(x)\right)'=f(x)-f(x)\equiv 0(\forall x\in A)$, а, значит, разность $\Phi(x)-F(x)$ является постоянной величиной на множестве A, т. е. $\Phi(x)-F(x)=C(\forall x\in A)$.

Определение 5.2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ *(на множестве* A*)* называется *неопределенным интегралом на* A *этой функции*. Обозначение: $\int f(x)dx.$ При этом сама функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией* и если интеграл от нее существует, то говорят, что $f(x)$ *интегрируема на* A.

Из теоремы 5.1 вытекает, что $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $F(x)$ — *фиксированная первообразная функции* $f(x)$ *(на множестве* A *), а* C — *произвольная постоянная.* Отметим, что равенство $\int f(x)dx = F(x)+C$ равносильно равенству $F'(x)\equiv f(x)(\forall x\in A)$. Таким образом, для доказательства того, что некоторая функция $\varphi(x)+C$ является неопределенным интегралом от функции $f(x)$, надо продифференцировать ее по x; если при этом будет получена подынтегральная функция $f(x)$, то равенство $\int f(x)dx = \varphi(x)+C$ *будет истинным.* Используя этот факт, легко докажем следующие формулы (табл. 5.1). Их часто называют *табличными интегралами*.

Таблица 5.1

$$1. \int 0dx = C = const.$$

$$2. \int dx = x + C.$$

$$3. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\left(\alpha \neq -1 \ - \textit{постоянная}\right).$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C.$$

$$8.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$$

$$9.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\left(a_{\neq 1}^{>0}\ -\text{постоянная}\right), \int e^x dx = e^x + C.$$

$$10.\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C\left(a > 0\ -\text{постоянная}\right).$$

$$11.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\left(a > 0\ -\text{постоянная}\right).$$

$$12.\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C.$$

$$13.\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C.$$

$$14.\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C.$$

$$15.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

$$16.\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Докажем, например, формулу 10, табл. 5.1. Дифференцируем правую часть равенства 10 по x:

$$\left(\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

Получена подынтегральная функция левой части равенства 10. Значит, равенство 10 верно. Точно так же доказываются остальные формулы этой таблицы.

Свойства неопределенного интеграла (везде далее предполагается, что интегралы от соответствующих функций существуют):

$$1^0)\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),\ 2^0)\int g'(x)dx = g(x) + C;$$

$$3^0)\int\left(C_1 f(x) + C_2 g(x)\right)dx = C_1\int f(x)dx + C_2\int g(x)dx$$

$$\left(C_1, C_2\ -\text{постоянные},\ C_1^2 + C_2^2 \neq 0\right).$$

Свойство 3^0 называют свойством *линейности интеграла*. Первые два свойства показывают, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны. Свойства $1^0 - 3^0$ доказываются дифференцированием правой части. Например, дифференцируя правую часть равенства 3^0, будем иметь

$$(C_1\int f(x)dx + C_2\int g(x)dx)' = C_1\left(\int f(x)dx\right)' + C_2\left(\int g(x)dx\right)' =$$

$$= C_1 f(x) + C_2 g(x).$$

Получена подынтегральная функция левой части равенства 3^0, значит, это равенство верно.

Далее будет установлено, что *всякая непрерывная на отрезке* $A=[a,b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом отрезке.*

5.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Перейдем к формулировке теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле, которая часто используется при вычислении интегралов. Здесь имеются в виду два утверждения[1]:

$$I.\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx \equiv \int g(\varphi(x))d\varphi(x)=\left[\varphi(x)=t\right]=\int g(t)dt\,|_{t=\varphi(x)}.$$

$$II.\int f(x)dx=\left[x=\psi(t),dx=\psi'(t)dt\right]=\int f(\psi(t))\psi'(t)dt\,|_{t=g(x)},$$

где $t=g(x)$ — функция, обратная к функции $x=\psi(t)$.

Теорема 5.2 а. *Пусть выполнены условия: 1) функция* $g(x)$ *непрерывна в своей области определения* D; *2) функция* $t=\varphi(x)$ *непрерывно дифференцируема на множестве* A *таком, что* $\varphi(A)\subseteq D$. *Тогда для всех* $x\in A$ *имеет место утверждение* I.

Теорема 5.2 б. *Пусть выполнены условия: 1) функция* $f(x)$ *непрерывна в своей области определения* D; *2) функции* $x=\psi(t)$ *и* $\psi'(t)$ *непрерывны на множестве* B *таком, что* $\psi(B)\subset D$; *3)* $\psi'(t)\neq 0(\forall t\in B)$; *4) функция* $x=\psi(t)$ *имеет на множестве* B *обратную функцию* $t=g(x)$. *Тогда для всех* $x\in\psi(B)$ *имеет место утверждение* II.

Доказательство теоремы 5.2 б. Продифференцируем правую часть равенства II, пользуясь теоремой о производной сложной функции $F(t)|_{t=g(x)}$, где $F(t)=\int f(\psi(t))\psi'(t)dt$. Будем иметь

$$\left(\int f(\psi(t))\psi'(t)dt\,|_{t=g(x)}\right)'=\left(\frac{d}{dt}\int f(\psi(t))\psi'(t)dt\right)|_{t=g(x)}\cdot g'(x)=$$

$$=f(\psi(t))\psi'(t)|_{t=g(x)}\,g'(x)=f(\psi(g(x)))\psi'(t)|_{t=g(x)}\cdot g'(x). \qquad (*)$$

Функции $t=g(x)$ и $x=\psi(t)$ — взаимно обратные, поэтому $\psi(g(x))\equiv x$ и (по теореме о производной обратной функции) имеет место равенство $\psi'(t)|_{t=g(x)}=\dfrac{1}{g'(x)}$. Подставляя это в равенство $(*)$, приходим к тождеству

---

[1] Здесь и всюду далее с тем, чтобы не прерывать выкладки, в квадратных скобках будем указывать соответствующие замены переменных или формулы, необходимые для преобразований исходных выражений.

$$\left(\int f\left(\psi(t)\right)\psi'(t)\,dt\,|_{t=g(x)}\right)' \equiv f(x)\left(\forall x\in\psi(B)\right).$$

Получена подынтегральная функция левой части равенства II, поэтому равенство II верно. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Преобразования в формуле I часто называют *процедурой введения множителя под знак дифференциала.* Формулу утверждения II удобно применять в тех случаях, когда функция $f\left(\psi(t)\right)\psi'(t)dt$ легче интегрируется, чем исходная функция $f(x)$. Ее применяют, например, при вычислении интегралов от иррациональностей вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx, \int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ (здесь $R(u,v)$ — рациональная функция). В первом случае делается замена $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}=t,$ во втором случае подбирают такую замену $x=\psi(t),$ чтобы исчезла иррациональность. Например,

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\left[x=\cos t, dx=-\sin t dt\right]=\int\sqrt{1-\cos^2 t}\left(-\sin t dt\right)=$$

$$=-\int\sin^2 t dt=-\frac{1}{2}\int\left(1-\cos 2t\right)dt=-\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C.$$

Далее надо вернуться к старой переменной с помощью обратной функции $t=\arccos x$ и получить ответ: $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arccos x+C.$

5.3. Интегрирования по частям в неопределенном интеграле

При вычислении интегралов часто используется *операция интегрирования по частям,* смысл которой раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 5.3. *Пусть функции* $u=u(x), v=v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на множестве* A*. Тогда на этом множестве справедливо равенство*

$$\int u dv=u\cdot v-\int v du.$$

Доказательство вытекает из цепочки тождеств

$$(u\cdot v)'\equiv u'v+u\cdot v'\Leftrightarrow u\cdot v'\equiv(u\cdot v)'-u'v\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int u\cdot v'dx\equiv\int(u\cdot v)'\,dx-\int u'v dx\Leftrightarrow\int u dv\equiv u\cdot v-\int v du.$$

Замечание 5.2. Операция интегрирования по частям применяется к интегралам вида

$$1.\int P_m(x)\times\left[\begin{array}{l}\sin\alpha x dx,\\ \cos\alpha x dx,\\ e^{\alpha x}dx.\end{array}\right.\quad 2.\int P_m(x)\times\left[\begin{array}{l}\arcsin x dx,\\ \arccos x dx,\\ \mathrm{arctg}\, x dx,\\ \ln x dx\end{array}\right.$$

($P_m(x)$ — многочлен степени m).

При этом в интегралах типа 1 для получения дифференциала dv надо ввести под знак дифференциала трансцендентную функцию $(\sin\alpha x, \cos\alpha x, e^{\alpha x})$, а в интегралах типа 2 под знак дифференциала надо ввести многочлен $P_m(x)$. Рассмотрим примеры:

$$\int(2x+1)\cos x dx=\int(2x+1)d(\sin x)=(2x+1)\sin x+2\cos x+C;$$

$$\int x\ln x dx=\int\ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}d(\ln x)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C;$$

$$\int x\,\mathrm{arctg}x dx=\frac{1}{2}\int\mathrm{arctg}x dx^2=\frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{arctg}x-\int\frac{x^2dx}{1+x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{arctg}x-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\right)dx=\frac{x^2\mathrm{arctg}x}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\mathrm{arctg}x}{2}+C.$$

5.4. Выделение полного квадрата

При интегрировании алгебраических дробей будет использоваться операция *выделения полного квадрата*:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right].$$

Продемонстрируем ее на примере интеграла

$$\int\frac{dx}{3-2x-x^2}=-\int\frac{dx}{-3+2x+x^2}=$$

$$=\left[x^2+2x-3=(x+1)^2-4, x+1=t, dx=dt\right]=-\int\frac{dt}{t^2-4}=$$

$$=-\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1-2}{x+1+2}\right|+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

[*Лекция 5*]**5.5. Определённый интеграл и его свойства**

5.5. Определенный интеграл, его свойства и геометрический смысл

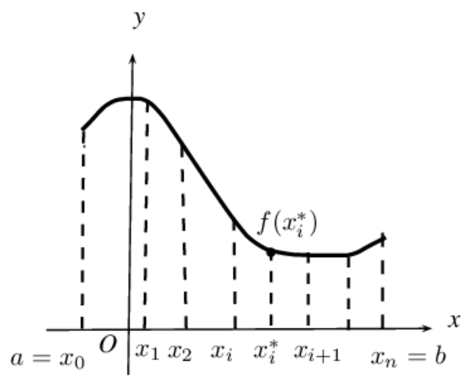

Рис. 5.1

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Произведем разбиение (Δ):

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \quad (5.1)$$

отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ (рис. 5.1) и выберем произвольно точки $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]\left(i = \overline{0, n-1}\right)$. Вычислим значения $f\left(x_i^*\right)$ и составим так называемую *интегральную сумму*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i \equiv f\left(x_0^*\right)\Delta x_0 + f\left(x_1^*\right)\Delta x_1 + \ldots + f\left(x_{n-1}^*\right)\Delta x_{n-1}$$

$$\left(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i\right).$$

Определение 5.3. Если существует конечный предел интегральных сумм:

$$\lim_{\lambda = max\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i = I,$$

и если этот предел не зависит от вида (5.1) разбиения (Δ) и выбора точек $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$, то его называют *определенным интегралом от функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$. Обозначение: $I = \int_a^b f(x)\,dx.$ При этом саму функцию $y = f(x)$ называют *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$ (заметим, что число $\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \Delta x_i \equiv \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \left(x_{i+1} - x_i\right)$ называется *диаметром разбиения* (Δ)).

Пусть теперь функция $f(x) \geq 0\left(\forall x \in [a,b]\right)$. По разбиению (Δ) строится ступенчатая фигура (рис. 5.2), состоящая из прямоугольников *MPFN* высоты $f\left(x_i^*\right)$ и длиной основания, равной Δx_i. Площадь этой ступенчатой фигуры (достройте ее самостоятельно) равна интегральной сумме $\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$ и эта площадь будет приближенно равна площади криволинейной трапеции [2] $\pi=\{(x,y):0\le y\le f(x), a\le x\le b\}$, т. е. $S_\pi \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x_i$, причем последнее равенство будет тем точнее, чем меньше диаметр разбиения $\lambda=\max\limits_{i=\overline{0,n-1}}\Delta x_i$, и оно становится точным при $\lambda\to 0$:

$$\boxed{S_\pi=\lim_{\lambda=max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Мы пришли к следующему *геометрическому смыслу определенного интеграла: интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *численно равен площади* S_π *криволинейной трапеции* $\pi=\{(x,y):0\le y\le f(x), a\le x\le b\}$ *с верхней границей, описываемой уравнением* $y=f(x), x\in[a,b]$.

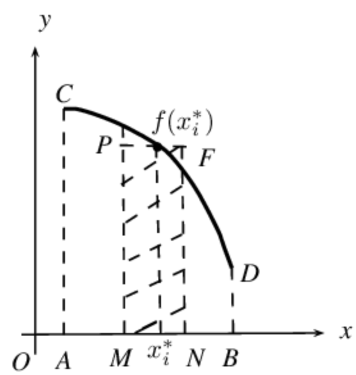

Рис. 5.2

Замечание 5.3. В определении 5.3 интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагается, что отрезок интегрирования ориентирован от a до b (т. е. $a<b$). В случае противоположной ориентации отрезка $[a,b]$ (т. е. при $b<a$) полагаем по определению $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$ Также полагаем по определению, что $\int_a^a f(x)dx=0.$

Перейдем к формулировке свойств определенного интеграла.

Ограниченность подынтегральной функции. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке (т. е. $\exists M=const:|f(x)|\le M\ \forall x\in[a,b]$).

Линейность интеграла. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$, *то на этом отрезке интегрируема и любая их линейная комбинация* $\alpha f(x)+\beta g(x)$ *и имеет место равенство*

---

[2] На рис. 5.2: π — это трапеция $ACDB,$ ограниченная сверху кривой $y=f(x),$ снизу — осью Ox, с боков — прямыми $x=a$ и $x=b.$

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx\ (\alpha,\beta=\mathrm{const}).$$

Аддитивность интеграла. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на максимальном из отрезков* $[a,b],[a,c],[c,b]$, *то она интегрируема и на двух других отрезках, причем имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Далее везде предполагаем, что $a<b$.

Монотонность интеграла. *Если функции* $f(x), g(x)$ *и* $p(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$ и $p(x)\le f(x)\le g(x)\,(\forall x\in[a,b])$, то $\int_a^b p(x)dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$

Интегрируемость модуля. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то на этом отрезке интегрируема и функция* $|f(x)|$, *причем имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx.$$

Теорема о среднем для интеграла. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$. *Тогда существует точка* $c\in[a,b]$ *такая, что* $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$ (геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что существует прямоугольник с основанием $[a,b]$ и высоты $f(c)$, равновеликий криволинейной трапеции π **)**.

Доказательство. Пусть $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (по теореме Вейерштрасса значения m и M функцией $f(x)$ достигаются). Имеем $m\le f(x)\le M\,(\forall x\in[a,b])$, поэтому из свойства монотонности интеграла отсюда получаем

$$\int_a^b m dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M\,dx\Leftrightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le$$

$$\le M(b-a)\Leftrightarrow m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M.$$

Последние неравенства показывают, что значение $K=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ является промежуточным для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а, значит, по теореме Больцано—Коши существует $c\in[a,b]$ такое, что

$$f(c)=K\Leftrightarrow f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\Leftrightarrow\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

Теорема доказана.

Мы доказали теорему о среднем в предположении $a<b$. Можно показать, что она верна и в случае $a>b$.

Рассмотрим ещё несколько примеров, которые демонстрируют простейшие приемы интегрирования.

$$1.\int ctg\, x dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d\left(\sin x\right)}{\sin x}=\left[\sin x=t\right]=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\sin x|+C.$$

$$2.\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x}=\left[\ln x=t\right]=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\ln x|+C.$$

$$3.\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\left[x=\operatorname{tg} t, dx=\frac{dt}{\cos^2 t}\right]=\int\frac{dt}{\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)^2\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\frac{1}{\cos^4 t}\cdot\cos^2 t}=$$

$$=\int\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C=\left[t=arctg\ x\right]=$$

$$=\frac{arctg\ x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sin(arctg\ x)\cdot\cos(arctg\ x)+C=$$

$$=\frac{arctg\ x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(arctg\ x\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(arctg\ x\right)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(arctg\ x\right)}}+C=\frac{arctg\ x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+C.$$

$$4.\int arctg\ x dx=\left[\int udv=uv-\int vdu\right]=(arctg\ x)x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=x\cdot arctg\ x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=x\cdot arctg\ x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

$$5.I=\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a}\int\cos bx d\left(e^{ax}\right)=\left[\int udv=uv-\int vdu\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx+b\int e^{ax}\sin bx dx\right)=$$

$$=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a^2}\int\sin bx de^{ax}=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\sin bx-b\int e^{ax}\cos bx dx\right),$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}I\Leftrightarrow\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx,$$

$$I=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}+C.$$

Дальнейшие примеры см. в следующем параграфе.

5.7. Задачи с решениями

Задача 5.1. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Сделаем замену $u=\frac{x}{a}$. Тогда $x=au,\quad dx=adu$. Следовательно, интеграл принимает вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{adu}{\sqrt{a^2-(au)^2}}=\int \frac{adu}{\sqrt{a^2\left(1-u^2\right)}}=$$

$$=\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+C=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Задача 5.2. Вычислить интеграл $\int \frac{x+1}{x^2+2x-5}dx$.

Решение. Применяем подстановку $u=x^2+2x-5$. Тогда $du=2xdx+2=2(x+1)dx$ или $(x+1)dx=\frac{du}{2}$. С использованием данной подстановки интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-5}dx=\int \frac{\frac{du}{2}}{u}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-5\right|+C.$$

Задача 5.3. Найти интеграл $\int 2^x e^x dx$.

Решение. Перепишем интеграл в виде

$$\int 2^x e^x dx=\int (2e)^x\,dx.$$

Обозначая $2e=a$ (это не замена переменной; аргументом по-прежнему остается x), получаем табличный интеграл

$$\int (2e)^x\,dx=\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C=\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}+C=$$

$$=\frac{2^x e^x}{\ln 2+\ln e}+C=\frac{2^x e^x}{\ln 2+1}+C.$$

Задача 5.4. Вычислить интеграл $\int (3x+5)dx$.

Решение. Запишем интеграл как

$$\int \cot(3x+5)dx=\int \frac{\cos(3x+5)}{\sin(3x+5)}dx.$$

Используя замену

$$u=\sin(3x+5),\ \ du=3\cos(3x+5)dx,\ \Rightarrow \cos(3x+5)dx=\frac{du}{3},$$

получаем ответ

$$\int (3x+5)\,dx = \int \frac{\cos(3x+5)}{\sin(3x+5)}\,dx = \int \frac{\frac{du}{3}}{u} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\sin(3x+5)\right| + C.$$

Задача 5.5. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx.$

Решение. Сделаем следующую подстановку:

$$u = 1+\cos^2 x, \ \Rightarrow du = \left(1+\cos^2 x\right)' dx = 2\cos x \cdot (-\sin x)\,dx = -\sin 2x dx.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{(-du)}{\sqrt{u}} = -2\int \frac{du}{2\sqrt{u}} =$$

$$= -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{1+\cos^2 x} + C.$$

Задача 5.6. Вычислить интеграл $\int x\sin(3x-2)\,dx.$

Решение. Используем формулу интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du.$ Пусть $u = x, \quad dv = \sin(3x-2)\,dx.$ Тогда

$$v = \int \sin(3x-2)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-2), \ du = dx.$$

Следовательно,

$$\int x\sin(3x-2)\,dx = -\frac{x}{3}\cos(3x-2) - \int\left(-\frac{1}{3}\cos(3x-2)\right)dx =$$

$$= -\frac{x}{3}\cos(3x-2) + \frac{1}{3}\int \cos(3x-2)\,dx =$$

$$= -\frac{x}{3}\cos(3x-2) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin(3x-2) + C =$$

$$= \frac{1}{9}\sin(3x-2) - \frac{x}{3}\cos(3x-2) + C.$$

Задача 5.7. Проинтегрировать $\int \ln x dx.$

Решение. В соответствии с формулой интегрирования по частям полагаем $u = \ln x, \quad dv = dx.$ Тогда $du = \frac{1}{x}dx, v = \int dx = x.$ Получаем

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

Задача 5.8. Вычислить интеграл $\int \arcsin x dx.$

Решение. Пусть $u = \arcsin x, dv = dx.$ Тогда $du = \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \int dx = x,$ так что интеграл переписывается в виде

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Чтобы вычислить новый интеграл, сделаем замену $w = 1 - x^2.$ В этом случае $dw = -2xdx, \quad xdx = -\frac{dw}{2}.$ В результате последний интеграл становится равным

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\left(-\frac{dw}{2}\right)}{\sqrt{w}} = -\int \frac{dw}{2\sqrt{w}} = -\sqrt{w} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Отсюда находим искомый интеграл:

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Задача 5.9. Вычислить интеграл $\int e^x \sin x dx.$

Решение. Используем интегрирование по частям: $\int udv = uv - \int vdu.$ Полагаем $u = e^x, \quad dv = \sin x dx.$ Тогда $du = e^x dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x$ и интеграл записывается в виде

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Применим формулу интегрирования по частям еще раз. Пусть теперь $u = e^x,$ $dv = \cos x dx.$ Следовательно, $du = e^x dx, \quad v = \int \cos x dx = \sin x.$ Для первоначального интеграла получаем следующее уравнение:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Решая это уравнение относительно неизвестного интеграла, находим

$$2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

или

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

Задача 5.10. Вывести формулу редукции (понижения степени) для $\int \sin^n x dx, n \ge 2.$

Решение. Используя формулу интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

полагаем $u=\sin^{n-1}x,\quad dv=\sin x dx.$

Тогда

$$du=\frac{d}{dx}\sin^{n-1}x=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x dx,$$

$$v=\int\sin x dx=-\cos x.$$

Следовательно,

$$\int\sin^n x dx=-\cos x\sin^{n-1}x-\int(-\cos x)(n-1)\sin^{n-2}x\cos x dx=$$
$$=-\cos x\sin^{n-1}x-\int(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x dx=$$
$$=-\cos x\sin^{n-1}x+\int(n-1)\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=$$
$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x dx-(n-1)\int\sin^n x dx.$$

Решим полученное уравнение относительно $\int\sin^n x dx.$ Получаем

$$\int\sin^n x dx+(n-1)\int\sin^n x dx=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x dx\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n\int\sin^n x dx=(n-1)\int\sin^{n-2}x dx-\cos x\sin^{n-1}x\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int\sin^n x dx=\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x dx-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}.$$

В качестве упражнения вычислите следующие интегралы.

6. $\int(-25x-2)\mathrm{e}^{-15x}\,\mathrm{d}x.$

7. $\int\ln\left(25x^2+4\right)\mathrm{d}x.$

8. $\int(-15x-2)\cos(25x)\,\mathrm{d}x.$

9. $\int\frac{5x}{\cos^2(5x)}\mathrm{d}x.$

10. $\int arctg\left(\sqrt{-20x-1}\right)\mathrm{d}x.$

11. $\int\frac{25x^2+\ln\left(25x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$

12. $\int\frac{(\pi-\arccos(5x))^3-1}{\sqrt{-25x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$

13. $\int (5x)\left(\cos^2(5x)\right) \mathrm{d}x.$

14. $\int \frac{-\sin(5x)-\cos(5x)}{\left(\cos(5x)-\sin(5x)\right)^5} \mathrm{d}x.$

15. $\int \frac{-5x+1}{\sqrt{25x+1}} \mathrm{d}x.$

16. $\int_1^3 \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(4x+1)} \mathrm{d}x.$

17. $\int_{-1}^{-2} \frac{4+4\ln\left(-\frac{5}{4}x\right)}{x} \mathrm{d}x.$

18. $\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{2-4\sqrt{-2x}}{\sqrt{-2x}(8x-1)} \mathrm{d}x.$

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется первообразной для данной функции? Как связаны между собой две первообразные одной и той же функции?

2. Что такое неопределенный интеграл? Какими свойствами он обладает?

3. Как проверить, что совокупность $F(x)+C$ является неопределенным интегралом от подынтегральной функции? Покажите это на примере табличных интегралов.

4. Как осуществляется замена переменных и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Расскажите об этом на примерах?

5. Как вычисляется интегральная сумма для заданной функции? Что является пределом интегральных сумм? Каков геометрический смысл определенного интеграла?

6. Какими основными свойствами обладает определенный интеграл? Перечислите их.

7. Какие простейшие приемы интегрирования вы знаете?

Продемонстрируйте их на примерах.

Рекомендуем также проверить свои знания по теме этой лекции на примерах из типового расчета .