[*Лекция 3*]. *3.1.Производная функции в точке, ее геометрический и механический смысл*

На рисунке 2.1 изображены график функции $y=f(x)$, точки $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$, M_0M — секущая, M_0N — касательная к кривой $y=f(x)$, углы $\alpha=(\overrightarrow{M_0N},\hat{}\,\overrightarrow{Ox}), \beta=\beta(\Delta x)=(\overrightarrow{M_0M},\hat{}\,\overrightarrow{Ox})$. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке $x=x_0$ и некоторой ее окрестности U_{x_0}.

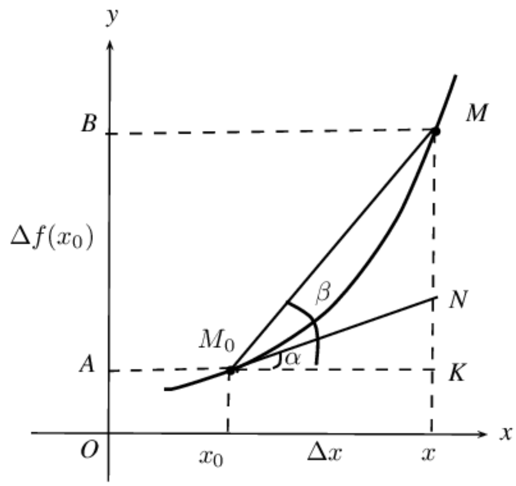

Рис. 2.1

Сместимся из точки x_0 в точку x. Величина $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением аргумента в точке* $x=x_0$, а величина $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\equiv\Delta f(x_0)$ *называется приращением функции* $y=f(x)$ *в точке* $x=x_0$ (соответствующим приращению Δx аргумента).

Определение 2.4. Если существует (конечный) предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\equiv\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=P,$$

то его называют *производной функции* $f(x)$ *в точке* $x=x_0$ и обозначают $f'(x_0)\equiv\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$. При этом функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* $x=x_0$, а величину $dy\equiv df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x\equiv f'(x_0)dx$ называют *дифференциалом*[1] *функции* $f(x)$ *в точке* $x=x_0$.

Выясним, в чем состоит геометрический смысл производной и дифференциала. Так как $\operatorname{tg}\beta(\Delta x)=\frac{MK}{M_0K}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ и так как $\beta(\Delta x)\to\alpha$, то $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, значит, *производная функции* $f(x)$ *в точке* $x=x_0$ *является угловым коэффициентом касательной к кривой* $y=f(x)$ *с*

---

[1] Дифференциал независимой переменной отождествляется с её приращением: $dx=\Delta x$.

точкой касания $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

С другой стороны, видно (см. рис. 2.1), что $NK = M_0K \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \Delta x \cdot f'\left(x_0\right) = df\left(x_0\right)$, поэтому

дифференциал $df\left(x_0\right)$ *равен приращению касательной* M_0N *к графику функции* $y = f\left(x\right)$ *при переходе аргумента из точки* x_0 *в точку* $x_0 + \Delta x$.

Используя геометрический смысл производной легко получить уравнения касательной и нормали к кривой $y = f\left(x\right)$ в точке $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$:

$y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$ (*касательная*),

$y = f\left(x_0\right) - \dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right)\left(\text{çäåñü } f'\left(x_0\right) \neq 0\right), x = x_0\left(f'\left(x_0\right) = 0\right)$ (*нормаль*).

Выясним теперь механический смысл производной. Если $S = S\left(t\right)$ — путь пройденный материальной точкой за время от момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$, то $\dfrac{\Delta S\left(t_0\right)}{\Delta t}$ — средняя скорость материальной точки, а величина $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S\left(t_0\right)}{\Delta t} = S'\left(t_0\right)$ — *мгновенная скорость материальной точки в момент* $t = t_0$.

Заметим, что согласно определению 2.4 понятия *дифференцируемости функции в точке* $x = x_0$ и *существование производной* $f'(x_0)$ идентичны друг другу. Часто эти понятия даются отдельно. Именно: функция $f(x)$ называется *дифференцируемой точке* $x = x_0$, если ее приращение в этой точке представляется в виде

$$\Delta f\left(x_0\right) = P \cdot \Delta x + o\left(\Delta x\right)\left(\Delta x \to 0; o\left(\Delta x\right) \equiv \Delta x \cdot o\left(1\right)\right),$$

где постоянная P не зависит от Δx. Разделив обе части этого равенства на $\Delta x \neq 0$, получим соотношение $\dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x} = P + o\left(1\right)\left(\Delta x \to 0\right)$, означающее, что существует производная $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x} = P$. Поэтому понятия дифференцируемости и существование производной эквивалентны друг другу. При этом дифференциал $df(x_0) = P \cdot \Delta x$ равен линейной части приращения $\Delta f\left(x_0\right)$ (её называют главной частью приращения функции), а число P равно производной $f'(x_0)$.

Покажем, что

4^0) *любая дифференцируемая в точке* $x = x_0$ *функция* $f\left(x\right)$ *непрерывна в точке* $x = x_0$ (обратное, вообще говоря, неверно; пример: $f\left(x\right) = |x|$ — непрерывна в точке $x = 0$, но $f'\left(0\right)$ не существует).

Действительно, пусть функции $f\left(x\right)$ дифференцируема в точке $x = x_0$.

Тогда её приращение в этой точке представляется в виде $\Delta f(x_0) \equiv f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = P\cdot\Delta x + \Delta x\cdot o(1)(\Delta x \to 0)$. Так как $\Delta x = x - x_0$, то отсюда получаем, что $f(x) = f(x_0) + P\cdot(x - x_0) + (x - x_0)\cdot o(1)(x \to x_0)$, поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

3.2. Действия над производными

Теорема 2.4. *Если функции* $u = u(x), v = v(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *то в этой точке дифференцируемы и функции* $u(x)\pm v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$, *причем*

$$(u \pm v)' = u' \pm v', (u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

в рассматриваемой точке x. *Если, кроме того,* $v(x)\neq 0$, *то в точке* x *дифференцируемо и частное, причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.$$

Доказательство проведем для производной суммы. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta(u(x)+v(x)) &\equiv (u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)) - (u(x)+v(x)) = \\ &= (u(x+\Delta x)-u(x)) + (v(x+\Delta x)-v(x)) = \\ &= \Delta u(x) + \Delta v(x),\end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\Delta(u(x)+v(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u(x)+v(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Теорема доказана.

3.3. Производная сложной и обратной функций и функции, заданной параметрически

Перейдем к выводу формул для производных сложной и обратной функций и функции, заданной параметрически.

Теорема 2.5. *Пусть сложная функция* $y = f(g(x))$ *определена в точке* x *и некоторой ее окрестности и пусть выполнены условия:*

1. функция $u = g(x)$ *дифференцируема в точке* x,

2. функция $y = f(u)$ *дифференцируема в соответствующей точке*

$u = g(x)$.

Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ *дифференцируема в точке* x *и имеет место равенство*

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(u)|_{u=g(x)} \cdot g'(x).$$

Доказательство. Сместимся из точки x в точку $x+\Delta x$. Тогда сложная функция получит приращение $\Delta f(g(x)) = f(g(x+\Delta x)) - (g(x))$. Так как функция $f(u)$ дифференцируема в точке $u = g(x)$, то имеет место соотношение

$$\begin{aligned} &\Delta f(g(x)) \equiv f(g(x)+\Delta u) - f(g(x)) = \\ &= f'(g(x))\cdot \Delta u + \Delta u \cdot o(1)(\Delta u \to 0). \end{aligned} \quad (*)$$

Далее, так как функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x, то имеет место представление $\Delta g(x) = g'(x)\Delta x + o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$. Поскольку величина $\Delta u = \Delta g(x)$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, то её можно подставить в соотношение (*) и получить

$$\begin{aligned} &\Delta f(g(x)) = \\ &= f'(g(x))\cdot\left(g'(x)\Delta x + o(\Delta x)\right) + \left(g'(x)\Delta x + o(\Delta x)\right)\cdot o(1) = \\ &= f'(g(x))\cdot g'(x)\Delta x + \left[f'(g(x))\cdot o(\Delta x) + \left(g'(x)\Delta x + o(\Delta x)\right)\cdot o(1)\right]. \end{aligned}$$

Здесь величина, стоящая в квадратной скобке, очевидно, равна $o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$, поэтому $\Delta f(g(x)) = \left\{f'(g(x))\cdot g'(x)\right\}\cdot \Delta x + o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$. Так как $f'(g(x))\cdot g'(x)$ не зависит от Δx, то последнее равенство означает, что сложная функция $f(g(x))$ дифференцируема в точке x и что $\left(f(g(x))\right)' = P = f'(u)|_{u=g(x)} \cdot g'(x)$. Теорема доказана

Напомним некоторые понятия.

а) Функция $y = f(x): A \to f(A)$ называется *обратимой на множестве* A, если

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right).$$

При этом функция $x = g(y): f(A) \to A$, сопоставляющая каждому $y \in f(A)$ элемент $x \in A$ такой, что $f(x) = y$, называется функцией, *обратной к* $f(x)$.

Очевидно, имеют место тождества:

$$f(g(y)) \equiv y(\forall y \in f(A)); g(f(x)) \equiv x(\forall x \in A)$$

(заметим, что все строго монотонные на множестве A функции обратимы на A).

б) Говорят, что функция $y = f(x)$ *задана параметрически уравнениями* $x = x(t), y = y(t)(a \le x \le b)$, *если функция* $x = x(t)$ *обратима на отрезке* $[a,b]$. В этом случае $f(x) \equiv y(g(x))$, где $t = g(x)$ — функция, обратная к функции $x = x(t)$.

Теорема 2.6. *Пусть функция* $y = f(x)$ *в некоторой окрестности точки* $x = x_0$ *имеет обратную функцию* $x = g(y)$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x = x_0$ *и* $f'(x_0) \neq 0$. *Тогда обратная функция* $x = g(y)$ *дифференцируема в соответствующей точке* $y = y_0 = f(x_0)$ *и имеет место равенство*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \Leftrightarrow x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Заметим, что в этой теореме часто меняют ролями x и $y: y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Теорема 2.7. *Пусть* функция $y = f(x)$ *задана параметрически уравнениями* $x = x(t), y = y(t) (a \le x \le b)$ *и пусть выполнены условия:*

1) функции $x = x(t), y = y(t)$ *дифференцируемы в фиксированной точке* $t \in [a,b]$;

2) $x'(t) \neq 0$ *в рассматриваемой точке* t.

Тогда функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* $x = x(t)$ *и имеет место равенство* $y'_x|_{x=x(t)} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \Leftrightarrow y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ (в рассматриваемой точке t).

Доказательство. Так как $y = f(x) \equiv y(t)|_{t=g(x)} = y(g(x))$, то по теореме 2.5 о производной сложной функции будем иметь $y'(x) = y'(t)|_{t=g(x)} \cdot g'(x)$. Обратная функция $t = g(x)$ дифференцируема в точке $x = x(t)$, так как исходная функция $x = x(t)$ дифференцируема в точке t и $x'(t) \neq 0$; при этом по теореме 2.6 имеем $g'(x)|_{x=x(t)} = \dfrac{1}{x'(t)}$. Значит, $y'(x) = y'(t)|_{t=g(x)} \cdot g'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}|_{t=g(x)}$. Полагая здесь $x = x(t)$, получим утверждение теоремы.

Задача 2.1 (Кузнецов Л.А. Типовые расчеты). Найти производную y'_x функции, заданной параметрически уравнениями $x = \arcsin\sqrt{t}, y = \sqrt{1+\sqrt{t}}$. Выразить y'_x через x.

Решение. По теореме 2.7 имеем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}|_{t=g(x)}$. Используя теорему 2.6 о производной сложной функции, а также таблицу 2.1 (см. далее), получаем

$$y'_x = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{t}}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{1+\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{t}}}{2}.$$

Из уравнения $x = \arcsin\sqrt{t}$ находим $\sqrt{t} = \sin x$, поэтому $y'_x = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin x}$.

3.4. Производные простейших элементарных функций

Теорема 2.8. *В области определения соответствующих функций имеют место следующие формулы (табл. 2.1).*

Таблица 2.1

$$1)\left(C\right)' = 0 \left(C = const.\right);$$

$$2)\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a \left(a_{\neq 1}^{>0} = const.\right), \left(e^x\right)' = e^x;$$

$$3)\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}\left(\alpha = const.\right);$$

$$4)\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}\left(x \neq 0\right);$$

$$5)\left(\sin x\right)' = \cos x, \left(\cos x\right)' = -\sin x,$$

$$\left(tg\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \left(ctg\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$6)\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$7)\left(arctg\, x\right)' = \frac{1}{1 + x^2}, \left(arcctg\, x\right)' = -\frac{1}{1 + x^2};$$

$$8)\left(sh\, x\right)' \equiv \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = ch\, x, \left(ch\, x\right)' \equiv \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = sh\, x,$$

$$\left(th\, x\right)' \equiv \left(\frac{sh\, x}{ch\, x}\right)' = \frac{1}{ch^2\, x}$$

Доказательство этих формул основано на определении производной и применении сформулированных ранее теорем. Покажем, например, справедливость формулы 5 для $\cos x$. По определению 2.4 производной имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{x+\Delta x + x}{2}\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{2x+\Delta x}{2} = -\sin x.$$

(здесь мы воспользовались формулой $\sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$). Следовательно, $(\cos x)' = -\sin x.$

Покажем также справедливость формулы 6 для $x.$ Функция $y = x$ является обратной по отношению к функции $x = y.$ Так как $x'_y = \cos^{-2} y \neq 0\left(|y| < \frac{\pi}{2}\right),$ то по теореме 2.6 имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}\Big|_{y=x} = \frac{1}{\cos^{-2} y}\Big|_{y=x} = \left(1+^2 y\right)^{-1}\Big|_{y=x} =$$

$$= \left(1+^2(x)\right)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Таким образом, $(x)' = \frac{1}{1+x^2}.$ Аналогично показывается справедливость других формул таблицы 2.1.

И, наконец, рассмотрим пример вычисления производной сложной функции, состоящей из многих звеньев:

$$\left(arctg^2\left(\ln\left(sin(3x+2)\right)\right)\right)' =$$

$$= 2 \cdot (arctg\left(\ln\left(sin(3x+2)\right)\right)) \cdot \frac{1}{1+\left(\ln\left(sin(3x+2)\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{sin(3x+2)} \cdot cos\,(3x+2) \cdot 3.$$

Здесь обычно используют метод подчеркивания:

$$y = \underline{\underline{\text{arctg}}}^2\left(\underline{\underline{\underline{\ln}}}\left(\underline{\sin}\left(\underline{\underline{\underline{3x+2}}}\right)\right)\right),$$

который состоит в том, что сначала дифференцируется операция возведения в квадрат, затем (последовательно) арктангенс, логарифм, синус и, наконец, функция $3x+2.$ При этом производная каждой операции вычисляется при значении той функции, от которой она берется. Например, логарифм берется от функции $\sin(3x+2),$ значит и производная $\ln(u)$ вычисляется в точке $u = \sin(3x+2).$ Рекомендуем отработать эту технику при вычислении производных выписанных ниже функций (см. [?]):

$$1)\ y=3\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)^2}}.\ 2)\ y=\frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}.$$

$$3)\ y=\frac{e^x}{2}\left[\left(x^2-1\right)\cos x+(x-1)^2\sin x\right].\ 4)\ y=-\frac{e^{3x}}{3\mathrm{sh}^3x}.$$

$$5)\ y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\ 6)\ y=\ln\ln^3\ln^2 x.\ 7)\ y=\mathrm{arctg}x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}.$$

$$8)\ y=\frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x+\frac{1}{8}\ln\left(1-4x^2\right).\ 9)\ y=x^{e^{\sin x}}.$$

$$10)\ y=(\mathrm{tg}x)^{\ln(\mathrm{tg}x)/4}.\ 11)\ y=(\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4}.$$

$$12)\ y=\frac{2}{3x-2}\sqrt{-3+12x-9x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}.$$

Дадим ответы только для нечётных номеров.

$$1)\quad y'=-\frac{x+3}{(x-1)\left(x^2-1\right)^{2/3}}.\qquad 3)\quad y'=\mathrm{e}^x\left[\cos(x)x^2\right].$$

$$5)\quad y'=\frac{1}{2x^{3/2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}.\quad 7)\quad y'=\frac{x^2+5x+4}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}.$$

$$9)\quad y'=x^{\mathrm{e}^{\sin(x)}}\left(\cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}\ln(x)+\frac{\mathrm{e}^{\sin(x)}}{x}\right).$$

$$11)\quad y'=-\frac{\cos(2x)^{\frac{1}{4}\ln(\cos(2x))}\sin(2x)\ln(\cos(2x))}{\cos(2x)}.$$

При решении примеров 1,2,9,10.11 удобно пользоваться *логарифмической производной* (см. следующую лекцию), так как при логарифмировании произведения и частного двух или более функций получаем более удобную для дифференцирования алгебраическую сумму функций. И, наконец, покажем, как вычисляется производная неэлементарной функции.

Задача 2.2 (Кузнецов Л.А. Типовые расчеты). Найти производную $f'(0)$, если $f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\cos\dfrac{1}{x},\ x\neq 0;\\ 0,\ x=0.\end{cases}$

Решение. Производную $f'(0)$ вычисляем по определению:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x+x\cos\frac{1}{x}\right).$$

Здесь перейти к пределу в произведении $x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$ нельзя, так как не существует предел второго сомножителя. Однако, учитывая, что $x = o(1), x \cdot \cos\frac{1}{x} = o(1) \cdot O(1) = o(1)(x \to 0), o(1) + o(1) = o(1)$, получаем, что $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} o(1) = 0.$

3.5. Задачи с решениями II

Напомним формулу дифференцирования сложной функции.

Если f и g — дифференцируемые функции, то сложная функция $y = f(g(x))$ также дифференцируема по x и ее производная равна

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) g'(x) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}.$$

Данная формула показывает, что производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную от внутренней функции. Важно иметь ввиду, что производная внутренней функции вычисляется в точке x, а производная внешней функции — в точке $u = g(x)$!

В примерах 2.24–2.47 найти производные заданных функций.

Задача 2.24. $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

Решение. Применяя правила дифференцирования сложной функции и частного, получаем:

$$y'(x) = \left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3\right]' = 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' =$$

$$= 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{bluex - red1 - bluex - red1}{(x-1)^2} =$$

$$= 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{(-red2)}{(x-1)^2} = -6\frac{(x+1)^2}{(x-1)^4} \quad (x \neq 1).$$

Задача 2.25.

$$y = \ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$$

Решение.

$$y'(x)=\left[\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)'=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

Задача 2.26.

$$y=\sqrt[3]{9x^2-1}$$

Решение. Учтем, что

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Следовательно,

$$y'(x)=\left(\sqrt[3]{9x^2-1}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(9x^2-1\right)^2}}\cdot\left(9x^2-1\right)'=$$

$$=\frac{18x}{3\sqrt[3]{\left(9x^2-1\right)^2}}=\frac{6x}{\sqrt[3]{\left(9x^2-1\right)^2}}\quad\left(x\neq\pm\frac{1}{3}\right).$$

Задача 2.27.

$$y=\left(5x+2\right)^{13}-\left(6x+7\right)^{10}$$

Решение. Применяя формулы для производной разности функций, степенной и сложной функции, получаем следующее выражение для производной:

$$y'(x)=\left[\left(5x+2\right)^{13}-\left(6x+7\right)^{10}\right]'=\left[\left(5x+2\right)^{13}\right]'-\left[\left(6x+7\right)^{10}\right]'=$$

$$=13\left(5x+2\right)^{12}\cdot\left(5x+2\right)'-10\left(6x+7\right)^{9}\cdot\left(6x+7\right)'=$$

$$=13\left(5x+2\right)^{12}\cdot5-10\left(6x+7\right)^{9}\cdot6=65\left(5x+2\right)^{12}-60\left(6x+7\right)^{9}.$$

Задача 2.28.

$$y=\left(x+\sqrt{x}\right)^3$$

Решение.

$$y'(x)=\left[\left(x+\sqrt{x}\right)^3\right]'=3\left(x+\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)'=$$

$$= 3\left(x+\sqrt{x}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 3\left(x+\sqrt{x}\right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{3\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(2\sqrt{x}+1\right)}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(2\sqrt{x}+1\right)}{2} \ \left(x \ge 0\right).$$

Задача 2.29.

$$y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Решение. Применим формулы производной сложной функции и производной частного:

$$y'(x) = \left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]' = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' =$$

$$= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{bluex - red1 - bluex - red1}{(x-1)^2} = \frac{-red2}{(x+1)(x-1)}.$$

Задача 2.30.

$$y = \sin x^3 \cos x^2$$

Решение. Дифференцируя сначала по формуле производной произведения двух функций и затем применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$y'(x) = \left(\sin x^3 \cos x^2\right)' = \left(\sin x^3\right)' \cos x^2 + \sin x^3 \left(\cos x^2\right)' =$$

$$= \cos x^3 \cdot \left(x^3\right)' \cdot \cos x^2 + \sin x^3 \cdot \left(-\sin x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' =$$

$$= \cos x^3 \cdot 3x^2 \cdot \cos x^2 - \sin x^3 \cdot \sin x^2 \cdot 2x = 3x^2 \cos x^3 \cos x^2 - 2x \sin x^3 \sin x^2.$$

Задача 2.31.

$$y = \sin\left(\cos^2 x\right)$$

Решение. Дифференцируем дважды как сложную функцию:

$$y'(x) = \left[\sin\left(\cos^2 x\right)\right]' = \cos\left(\cos^2 x\right) \cdot \left(\cos^2 x\right)' =$$

$$= \cos\left(\cos^2 x\right)\cdot 2\cos x\cdot\left(\cos x\right)' = \cos\left(\cos^2 x\right)\cdot 2\cos x\cdot\left(-\sin x\right) =$$

$$= -\cos\left(\cos^2 x\right)\cdot 2\cos x\sin x = -\cos\left(\cos^2 x\right)\sin 2x.$$

Задача 2.32.

$$y = \arcsin\frac{1}{x}$$

Решение. Производная от арксинуса относится к табличным производным и равна

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, можно записать следующее выражение:

$$y'(x) = \left(\arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = -\frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

Учтем, что $\sqrt{x^2} = |x|$ и, следовательно, $|x|^2 = x^2$. Тогда

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{|x|}{|x|^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Область определения функции и производной имеет вид: $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Задача 2.33.

$$y = \sqrt{x\sqrt{x}}$$

Решение. Применяя правила дифференцирования произведения функций и сложной функции, получаем:

$$y'(x) = \left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\left(x\sqrt{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\left(x'\sqrt{x} + x\left(\sqrt{x}\right)'\right) = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\left(1\cdot\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}}{2\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{\frac{3\sqrt{x}}{2}}{2\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{3\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\ \left(x>0\right).$$

Задача 2.34.

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

Решение. Предполагая, что $x \neq 1$, найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)'.$$

По правилу дифференцирования частного находим:

$$y'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{bluex^2 - red2x + red1 + bluex^2 + red2x + red1} \cdot \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2\left(bluex^2 + red1\right)} \cdot \frac{x - green1 - x - green1}{(x-1)^2} = \frac{-green2(x-1)^2}{2\left(x^2+1\right)(x-1)^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Задача 2.35.

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

Решение.

$$y'(x) = \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)' = \left(\sin^4 x\right)' + \left(\cos^4 x\right)' =$$

$$= 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' + 4\cos^3 x \cdot (\cos x)' =$$

$$= 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x = 4\sin x \cos x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right).$$

Далее, используя формулы двойного угла, получаем более простой ответ:

$$y'(x) = 4\sin x \cos x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) =$$

$$= -2\cdot 2\sin x \cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = -2\sin 2x \cos 2x = -\sin 4x.$$

Задача 2.36.

$$y = \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$$

Решение. Учитывая, что

$$(x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

по правилу дифференцирования сложной функции находим:

$$y'(x) = \left[\arctan\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)\right]' =$$

$$=\frac{1}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}\cdot\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\cdot\left(1-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{blue1+redx^2-2x\sqrt{1+x^2}+blue1+redx^2}=\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}}{blue2+red\,2x^2-2x\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{2\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

Задача 2.37.

$$y=\arccos\frac{a}{x}$$

Решение. Данная функция определена при $x\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$. Учитывая, что

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

по правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$y'(x)=\left(\arccos\frac{a}{x}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2}}}\cdot\frac{a}{x^2}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{a}{|x|^2}=\frac{a}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Задача 2.38.

$$y=\operatorname{arcctg}\frac{x^2}{a}\ (a\neq 0)$$

Решение. Производная арккотангенса является табличной производной:

$$(\operatorname{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда, дифференцируя заданную функцию как сложную, находим:

$$y'(x)=\left(\operatorname{arcctg}\frac{x^2}{a}\right)'=-\frac{1}{1+\left(\dfrac{x^2}{a}\right)^2}\cdot\left(\frac{x^2}{a}\right)'=-\frac{1}{1+\dfrac{x^4}{a^2}}\cdot\frac{2x}{a}=-\frac{1}{\dfrac{a^2+x^4}{a^2}}\cdot\frac{2x}{a}=$$

$$= -\frac{2a^2x}{a\left(a^2+x^4\right)} = -\frac{2ax}{a^2+x^4}.$$

Задача 2.39.

$$y = \sqrt[3]{8\frac{x}{2}}$$

Решение. Применяя дважды правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$y'(x) = \left(\sqrt[3]{8\frac{x}{2}}\right)' = \left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{8}{3}}\right]' =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{8}{3}-1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= -\frac{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{5\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}.$$

Данная функция и ее производная существуют при условии $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2.40. $y = \log_5 \sin 2x$

Решение. Область определения заданной функции определяется следующим условием:

$$\sin 2x > 0, \ \Rightarrow 2\pi n < 2x < \pi + 2\pi n \ \text{ èëè } \ \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Дифференцируя функцию как "трехслойную" композитную функцию, получаем:

$$y'(x) = \left(\log_5 \sin 2x\right)' = \frac{1}{\ln 5 \sin 2x}\cdot\left(\sin 2x\right)' =$$

$$= \frac{1}{\ln 5 \sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2 = \frac{2\cos 2x}{\ln 5 \sin 2x} = \frac{2\cot 2x}{\ln 5}.$$

Задача 2.41. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$

Решение. Область определения данной функции удовлетворяет неравенству $|x| > 1$. Дифференцируя как сложную функцию и упрощая, получаем следующее выражение для производной:

$$y'(x) = \left(\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' =$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{2x\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\left(x^2+1\right)\cdot 2x\left(bluex^2+red1-bluex^2+red1\right)}{4\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{4x}{4\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x}{x^4-1}.$$

Задача 2.42. $y=x\sin\frac{1}{x}$

Решение. Запишем сначала как производную произведения:

$$y'(x)=\left(x\sin\frac{1}{x}\right)'=(x)'\sin\frac{1}{x}+x\left(\sin\frac{1}{x}\right)'.$$

Далее, по формуле производной сложной функции получаем

$$y'(x)=1\cdot\sin\frac{1}{x}+x\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\sin\frac{1}{x}+x\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Задача 2.43. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Решение. Дифференцируя аргумент логарифма как сложную функцию, имеем:

$$y'(x)=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Можно убедиться, что в данном случае функция и производная существуют при любом действительном x.

Задача 2.44. $y=\sin\left[\sin(\sin x)\right]$

Решение. Здесь мы опять имеем дело с "трехслойной" функцией. Поэтому дважды применяем формулу производной сложной функции. В итоге получаем следующее выражение для производной:

$$y'(x) = \left(\sin\left[\sin(\sin x)\right]\right)' = \cos\left[\sin(\sin x)\right]\cdot\left[\sin(\sin x)\right]' =$$

$$= \cos\left[\sin(\sin x)\right]\cdot\cos(\sin x)\cdot(\sin x)' = \cos\left[\sin(\sin x)\right]\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x.$$

Задача 2.45. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$

Решение. Дифференцируя дважды как сложную функцию, получаем:

$$y'(x) = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}\right]' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(1+\ln x)^3}}\cdot\left[(1+\ln x)^3\right]' =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{(1+\ln x)^3}}\cdot 3(1+\ln x)^2\cdot(1+\ln x)' = \frac{3(1+\ln x)^2}{3(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}.$$

Область определения данной функции и производной удовлетворяет условию:

$$\begin{cases} 1+\ln x \ge 0 \\ x > 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} \ln x \ge -1 \\ x > 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} \ln x \ge \ln\frac{1}{e}, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \ge \frac{1}{e}.$$

Задача 2.46. $y = x\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right]$

Решение. Применяя формулы производных произведения и разности функций и правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$y'(x) = \left(x\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right]\right)' =$$

$$= x'\cdot\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + x\cdot\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right]' =$$

$$= 1\cdot\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + x\cdot\left[\cos(\ln x)\cdot(\ln x)' + \sin(\ln x)\cdot(\ln x)'\right] =$$

$$= \sin(\ln x) - \cos(\ln x) + x\cdot\left[\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} + \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right] =$$

$$= \sin(\ln x) - \cos(\ln x) + x\cdot\frac{1}{x}\cdot\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] =$$

$$= blue\sin(\ln x) - red\cos(\ln x) + red\cos(\ln x) + blue\sin(\ln x) = blue2\sin(\ln x)\ \ (x > 0).$$

Задача 2.47. $y = \sqrt{x+1} - \ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$

Решение. Используя правила дифференцирования разности функций, суммы функций и сложной функции, находим:

$$y'(x)=\left[\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right]'=\left(\sqrt{x+1}\right)'-\left[\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right]'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x+1}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}.$$

После приведения к общему знаменателю получаем

$$y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1+\sqrt{x+1}-1}{1+\sqrt{x+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{1}{2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}.$$

Данная функция и ее производная существуют при $x\ge -1$.

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются односторонние пределы функции в точке от ее обычного предела в этой точке?

2. Какая функция называется непрерывной в точке? Сформулируйте непрерывность функции в точке с помощью обычного предела и односторонних пределов. Какие точки называются точками разрыва первого и второго рода?

3. В каком случае сумма, разность, произведение и частное двух функций будет непрерывно в данной точке?

4. Что такое элементарная функция? Сформулируйте теорему о непрерывности элементарной функции.

5. Как определяется производная функции в точке? Каковы геометрический и механический смысл производной?

6. Как записываются уравнения касательной и нормали к кривой?

7. Как выполняются арифметические действия над производными? Перечислите формулы для производных основных элементарных функций.

8. Всегда ли непрерывная в точке функция будет дифференцируемой в этой точке? Приведите пример.

9. Как определяется сложная функция? Сформулируйте теорему о производной сложной функции.

10. Какая функция называется обратимой на множестве? Будут ли обратимыми строго монотонные функции? Сформулируйте теорему о производной обратной функции.

11. Как определяется функция, заданная параметрически? Сформулируйте теорему о производной функции, заданной параметрически.

12. Что такое метод подчеркивания и как с помощью него вычисляется производная сложной функции, состоящей из нескольких звеньев (на примере).

Предлагаем также решить задачи по теме этой лекции в типовом расчете .