Лекция 1. Предел функции в точке и при $x \to \pm\infty$. Бесконечно малые функции и их применение при вычислении пределов функций

1.1. *Обозначения*

Множества (любой природы) обозначаются большими латинскими буквами $(A, B, \ldots)$, а их элементы — малыми латинскими буквами $(a, b, x, y, \ldots)$. Большими латинскими буквами обозначаются также высказывания (например, $A \equiv$ $\{$число $m \cdot (m+1) \cdot (m+2)$ делится на 3$\}$). Везде ниже вводятся следующие обозначения:

$\forall$ — «всякий», «каждый», « для всякого»,«для каждого»;

$\exists$ — «существует», «найдется хотя бы один»;

$\in$ — «принадлежит», $\notin$ – «не принадлежит»;

$\Rightarrow$ — «следует из», «вытекает из»;

$\Leftrightarrow$ — «эквивалентно», «необходимо и достаточно», «тогда и только тогда»;

$\subset$ — «входит в», «содержится в»;

$\equiv$ или $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ — «по определению» (в тексте слово «если»);

$\wedge$ — логическое «**И**», $\vee$ — логическое «**ИЛИ**»;

$A \cup B$ — объединение множеств A и B, $A \cap B$ — пересечение множеств A и B;

$A \setminus B$ — разность множеств A и B, $\bar{A}$ — дополнение A (если A — высказывание, то $\bar{A}$ — отрицание высказывания A).

Через $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ обозначаются множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел соответственно (используются также обозначения: N, Z, Q, R). При этом имеют место включения $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.2. Модуль (абсолютная величина) действительного числа

[***Лекция 1*]*1.3. Понятие функции*** **Модуль числа** a **определяется следующим образом:**

$$|a| = \begin{cases} +a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля:

1) $(|x| \geq +x) \wedge (|x| \geq -x)$; **2)** $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$; **3)** $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq +a) \vee (x \leq -a)$;

4) $|x+y| \leq |x| + |y|$; **5)** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; **6)** $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} (y \neq 0)$;

7) $|x^{\alpha}| = |x|^{\alpha}$;

8) $|x - y| \geq \| x| - |y\|$.

1.3. Понятие функции

Пусть даны два множества A и B.

Определение 1.1. Говорят, что на множестве A задана функция $y = f(x)$, отображающая множество A в множество B (ïèøóò $y = f(x): A \to B$), если каждому элементу $x \in A$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in B$ по закону $y = f(x)$. При этом x называется аргументом функции $y = f(x)$, а y — значением этой функции (при указанном значении аргумента x). Множество A называется ***областью определения*** *функции* $f(x)$ *(обозначение:* $A = D(f)$*), а множество* $E(f) = \{y \in B / \exists x \in A : y = f(x)\}$ *называется* ***множеством значений этой функции***.

Чаще всего функцию задают двумя способами: а) *табличный способ* (здесь для каждого аргумента x указывается соответствующий y) и б*) аналитический способ* (формулой; например, $y = \sqrt{sin(\log_2 x)}$). При аналитическом задании функции $y = f(x)$ в качестве области определения обычно берут *естественную область определения*, т. е. множество $D(f) = \{x :$выражение $f(x)$ имеет смысл$\}$. Например, $D\left(\sqrt{\log_2 x}\right) = \{x : x \geq 1\}$. Будет также использоваться обозначение $f(G)$ для множества всех значений $f(x)$, когда x пробегает подмножество $G \subset D(f)$.

1.4. Предел функции

Сначала дадим понятие предела функции в конечной точке $x = x_0 \neq \infty.$ Различают *проколотую* δ *-окрестность* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *точки* $x = x_0,$ которая определяется как симметричный интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ с выброшенной точкой x_0 :

$$\dot{U}_{x_0}(\delta) \equiv \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

и просто δ *-окрестность* $U_{x_0}(\delta)$ точки $x = x_0,$ совпадающую с указанным интервалом:

$$U_{x_0}(\delta) \equiv \{x : |x - x_0| < \delta\} \equiv (x_0 - \delta, x_0 - \delta).$$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}$ точки x_0 (в самой точке x_0 функция может быть определена или нет; её значение в точке x_0 не существенно).

Определение 1.2. Говорят, что число P является пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ (зависящее, вообще говоря, от ε) такое, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta,$ будет иметь место неравенство $|f(x) - P| < \varepsilon.$ При этом пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P$ и читают: « предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен P».

Это определение записывают кратко так:

$$\begin{aligned}&(\lim_{x \to x_0} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \\ &(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon)).\end{aligned} \quad (1.1)$$

Отметим, что в этом определении не фигурирует значение функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (x стремится к $x_0,$ но $x \neq x_0,$ так как $0 < |x - x_0|$). Это означает, что предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P$ не зависит от того, каким является значение функции $f(x),$ в точке $x = x_0.$ Например, функции

$$f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0, \\ 100, x = 0, \end{cases}\ f_3(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0, \\ \textit{не определена}\ x = 0 \end{cases}$$

имеют один и тот же предел $P = 0$ в точке $x = 0.$

Геометрически высказывание (1.1) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что кривая $y = f(x)$ при всех $x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)$ лежит внутри полосы $(P - \varepsilon < y < P + \varepsilon).$ Если эта ситуация будет иметь место для произвольного интервала $(P - \varepsilon, P + \varepsilon)$ (или, что то же самое, для произвольного

$\varepsilon > 0$), то число P будет пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$. Если же существует интервал $(P-\varepsilon, P+\varepsilon)$ такой, что в любой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ точки $x = x_0$ найдется абсцисса x, для которой $f(x) \notin (P-\varepsilon, P+\varepsilon)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq P.$ Геометрические соображения часто используют при доказательстве существования пределов для определенных функций.

Теорема 1.1. *Если существует (конечный) предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P,$ *то он единственен, а сама функция f(x) является ограниченной при* $x \to x_0$, т. е. ***существуют постоянные*** $M > 0, \delta > 0$ ***такие, что для всех*** x ***из проколотой окрестности*** $\dot{U}_{x_0}(\delta) \equiv \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\}$ ***точки*** x_0 ***имеет место неравенство*** $|f(x)| \leq M.$

Доказательство. Так как существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P,$ то по определению 1.2 для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что имеет место высказывание $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon).$ Возьмем $\varepsilon = 1$ и воспользуемся неравенствами $|a-b| > \pm(|a| - |b|),$ справедливыми для произвольных a и $b.$ Будем иметь

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| - |P| \leq |f(x) - P| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq 1 + |P|.$$

Таким образом, $1 + |P| \equiv M$ и поэтому функция $f(x)$ является ограниченной при $x \to x_0.$ Теорема доказана.

Замечание 1.1. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию, выделенному в теореме 1.1 жирным шрифтом, то ее называют функцией *класса* $O(1)(x \to x_0)$ *и пишут* $f(x) = O(1)(x \to x_0).$ Функции класса $O(1)(x \to x_0)$ обладают следующими очевидными свойствами.

Теорема 1.2. *Если* $f(x) = O(1)(x \to x_0)$ *и* $g(x) = O(1)(x \to x_0),$ *то* $f(x) \pm g(x) = O(1)(x \to x_0),\ f(x) \cdot g(x) = O(1)(x \to x_0).$

1.5. Бесконечно малые функции и их свойства

Определение 1.3. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией в точке* $x = x_0$ *или функцией класса* $o(1)(x \to x_0)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$ При этом пишут $\alpha(x) = o(1)(x \to x_0).$

Таким образом, $\alpha(x) = o(1)(x \to x_0) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon).$

Например, функция $\alpha(x)=(1-x)^2=o(1)(x\to 1)$, а функции $\cos(1/x), x+1, \ln(x+2)$ не являются функциями класса $o(1)(x\to 0)$.

Теорема 1.3. *Имеют место следующие свойства класса* $o(1)(x\to x_0)$:

$1^0)$ *Если* $\alpha(x)=o(1)(x\to x_0)$, то $\alpha(x)=O(1)(x\to x_0)$, т. е. $o(1)\subset O(1)(x\to x_0)$;

$2^0) o(1)\pm o(1)=o(1)(x\to x_0)$;

$3^0) o(1)\cdot o(1)=o(1)(x\to x_0)$;

$4^0) o(1)\cdot O(1)=o(1)(x\to x_0)$.

Доказательство. Свойство $1^0)$ очевидно. Докажем свойство $2^0)$ (другие свойства доказываются аналогично). Пусть $\alpha(x)=o(1)$ и $\beta(x)=o(1)\,(x\to x_0)$. Тогда для произвольного $\varepsilon>0$ существуют числа $\delta_j=\delta_j(\varepsilon)>0\,(j=1,2)$ такие, что

$$(\forall x)\left(0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad (1.2)$$

$$(\forall x)\left(0<|x-x_0|<\delta_2\Rightarrow|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right). \qquad (1.3)$$

Выберем $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$. Тогда $\forall x\in\dot{U}_{x_0}(\delta)$ будут иметь место одновременно неравенства (1.2) и (1.3). Складывая их, получим, что

$$(\forall x)\left(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\right).$$

Это и означает, что $\alpha(x)+\beta(x)=o(1)(x\to x_0)$, т. е. верно свойство $2^0)$. Теорема доказана.

Свойства $2^0 - -4^0$ обобщаются по индукции на любое конечное число функций. Например, $\underbrace{o(1)\cdots o(1)}_{n<\infty}=o(1)(x\to x_0)$.

Следующая теорема устанавливает связь между бесконечно малыми функциями и функциями, имеющими предел при $x\to x_0$.

Теорема 1.4. *Если существует (конечный) предел* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=P$, *то* $f(x)=P+o(1)(x\to x_0)$. *Обратно: если функция* $f(x)$ *представляется в виде* $f(x)=P+o(1)(x\to x_0)$, *то* $f(x)$ *имеет предел в точке* $x=x_0$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=P$.

Доказательство. Существование предела $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=P$ эквивалентно высказыванию

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:(\forall x)\left(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-P|<\varepsilon\right). (1.4)$$

Высказывание (1.4), в свою очередь, эквивалентно тому, что функция $\alpha(x)=f(x)-P=o(1)\ (x\to x_0)$, т. е. что $f(x)=P+o(1)(x\to x_0)$. Теорема доказана.

Замечание 1.2. Равенство $f(x)=P+o(1)(x\to x_0)$ называют *асимптотическим разложением функции* $f(x)$, *имеющей предел в точке* $x = x_0$.

И, наконец, дадим определение предела функции в бесконечности. Сделаем это кратко.

Определение 1.4. Множества

$$U_{\infty}(R) = \{x : |x| > R\}, U_{-\infty}(R) = \{x : x < -R\},$$
$$U_{+\infty}(R) = \{x : x > R\}$$

называются R -окрестностями точек $x_0 = \infty, x_0 = -\infty, x_0 = +\infty$ соответственно. Следующие высказывания являются определениями предела функции $f(x)$ в бесконечности:

$$1)(\lim_{x\to\infty} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x)(x \in U_{\infty}(R) \Rightarrow | f(x) - P | < \varepsilon));$$

$$2)(\lim_{x\to-\infty} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x)(x \in U_{-\infty}(R) \Rightarrow | f(x) - P | < \varepsilon));$$

$$3)(\lim_{x\to+\infty} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x)(x \in U_{+\infty}(R) \Rightarrow | f(x) - P | < \varepsilon)).$$

Перейдем теперь к обоснованию арифметических действий над пределами.

Теорема 1.5. *Если существуют (конечные) пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P_1, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = P_2,$ *то и существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right], \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right];$ *при этом*

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Если (кроме существования пределов P_1 *и* P_2 *) выполняется ещё условие* $P_2 \neq 0$, *то существует предел частного* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)/g(x)\right]$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство. Докажем, например, теорему о пределе произведения. Так как существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P_1, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = P_2,$ то по теореме 1.4 имеют место асимптотические разложения $f(x) = P_1 + o(1)(x \to x_0), g(x) = P_2 + o(1)(x \to x_0).$ Перемножая эти равенства, будем иметь:

$$f(x) \cdot g(x) = P_1 P_2 + P_1 \cdot o(1) + P_2 \cdot o(1) + o(1) \cdot o(1).$$

Поскольку $P_j = const = O(1)(x \to x_0),$ то $P_j \cdot o(1) = o(1), j = 1, 2$ (см. теорему 1.3). Далее, поскольку $o(1) \cdot o(1) = o(1), o(1) + o(1) + o(1) = o(1),$ то функция $f(x) \cdot g(x)$ представляется в виде $f(x) \cdot g(x) = P_1 P_1 + o(1)(x \to x_0).$ По теореме 1.4 отсюда следует, что существует предел произведения $f(x) \cdot g(x)$ при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = P_1 \cdot P_2 = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Теорема доказана.

1.6. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентных бесконечно малых

Введем следующее понятие. Пусть x_0 — конечная или бесконечная точка и пусть функции $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Определение 1.5. *Две бесконечно малые функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *(при* $x \to x_0$*) называются эквивалентными, если* $\beta(x) \neq 0$ *в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *и если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

При этом пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)(x \to x_0).$

Важность этого понятия становится ясной при формулировке следующего утверждения, используемого при вычислении пределов.

Теорема 1.6. *Если* $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)(x \to x_0)$ *и если существует предел* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = P,$ *то существует и предел* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ *и он также равен числу* P.

Доказательство. Переходя в тождестве $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \equiv \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$ к пределу при $x \to x_0$ и учитывая, что $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)(x \to x_0),$ получаем утверждение теоремы.

Используя эту теорему, а также выписанные ниже формулы (табл. 1.1), можно без особого труда вычислять пределы заданных функций.

Таблица 1.1

Если $u(x) \to 0 (x \to x_0)$, *то*
1) $\sin u \sim u$;
2) $\mathrm{tg} u \sim u$;
3) $\arcsin u \sim u$;
4) $arctg\ u \sim u$;
5) $1 - \cos u \sim \frac{1}{2} u^2$;
6) $e^u - 1 \sim u$;
7) $a^u - 1 = u \ln a, a > 0, a \neq 1$;
8) $\ln(1+u) \sim u$;
9) $(1+u)^\sigma - 1 \sim \sigma \cdot u, \sigma = \mathrm{const}$.

Первые четыре разложения вытекают из первого замечательного предела $\lim\limits_{u \to x_0}((\sin u)/u) = 1$. Обоснование разложений 6–9 основано на втором замечательном пределе $\lim\limits_{u \to 0}(1+u)^{1/u} = e$ (доказательство этих пределов мы опускаем). Покажем, например, справедливость утверждения 6. В самом деле, делая замену переменных $e^u - 1 = x$ (тогда $u = \ln(1+x)$), будем иметь

$$\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1+x)^{1/x}} = \frac{1}{\ln e} = 1 \Leftrightarrow e^u - 1 \sim u.$$

Справедливость разложения 6 доказана. При вычислении предела функции на бесконечности часто используется следующая формула:

$$\sqrt[n]{\frac{a_m x^m + \ldots + a_0}{b_k x^k + \ldots + b_0}} \sim \sqrt[n]{\frac{a_m x^m}{b_k x^k}} (x \to +\infty, a_m \cdot b_k > 0),$$

доказательство которой предлагаем провести самостоятельно.

Пример 1.1. $P = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = [x - 1 = u, x = u + 1] =$

$$\lim_{u \to 0} \frac{-\sin \pi u}{u} = [\sin \pi u \sim \pi u (u \to 0)] =$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{-\pi u}{u} = \lim_{u \to 0}(-\pi) = -\pi.$$

Пример 1.2. $\lim\limits_{x \to \pi/6} \frac{\cos 3x}{3^{x - \pi/6} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[x - \frac{\pi}{6} = t\right] = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\cos(\pi/2 + 3t)}{3^t - 1} =$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t}{3^t-1} = \left[\sin 3t \sim 3t, 3^t-1 \sim t\ln 3\right] = \lim_{t\to 0}\frac{-3t}{t\ln 3} = -\frac{3}{\ln 3}.$$

1.7. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta_0)$ точки $x = x_0$.

Определение 1.6. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (ББФ) при $x \to x_0$, если для всякого $R > 0$ существует число $\delta = \delta(R) > 0$ такое, что

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > R).$$

При этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty.$

Заметим, что ∞ — это не число, а символ, поэтому бесконечный предел — это всего лишь обозначение бесконечно большой функции. Тем не менее при вычислениях удобно относиться к бесконечному пределу как к обычному, хотя для бесконечных пределов и существуют свои правила действий, несколько отличные от правил действий над конечными пределами (см. далее свойства 5^0 – 8^0).

Если функция $f(x)$ сохраняет знак в некоторой проколотой окрестности точки $x = x_0$ и является при этом бесконечно большой функцией, то естественно писать

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \; (\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$$

(в зависимости от знака функции $f(x)$ в указанной окрестности). Более точно:

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall R > 0 \exists \delta = \delta(R) > 0:$$

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R)),$$

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall R > 0 \exists \delta = \delta(R) > 0:$$

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -R)).$$

В этих определениях и определении 1.5 фигурирует окрестность

$$\dot{U}_{x_0}(\delta) = \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\} \subset U_{x_0}(\delta_0)$$

конечной предельной точки $x_0 (x_0 \neq \infty)$. Почти также определяются бесконечно большие функции на бесконечности. В этом случае под точкой $x = x_0$ следует понимать один из символов: $\infty, -\infty, +\infty,$ а под окрестностью $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ — окрестность соответствующей бесконечно удаленной точки x_0. Например,

$$(\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall R > 0 \exists M = M(R) > 0:$$

$$(\forall x)(x > M \Rightarrow f(x) < -R)).$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Пусть функция* $\alpha(x)$ *не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *точки* $x = x_0$. *Тогда справедливо высказывание*

$$(\alpha(x) = o(1)(x \to x_0)) \Leftrightarrow \left(f(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \;---\text{ÁÁÔ}(x \to x_0) \right).$$

Иначе говоря, для того чтобы функция $\alpha(x)$ *была бесконечно малой при* $x \to x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы обратная к ней по величине функция* $f(x) = 1/\alpha(x)$ *была бесконечно большой при* $x \to x_0$.

Доказательство. Пусть $\alpha(x) = o(1)(x \to x_0)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (считаем $\delta \le \delta_0$) такое, что

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon).$$

Если теперь $R > 0$ — произвольное число, то, выбирая здесь $\varepsilon = R^{-1}$, получим высказывание

$$(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| = |\frac{1}{\alpha(x)}| > \varepsilon^{-1} = R\right),$$

означающее, что функция $f(x) = 1/\alpha(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.

Обратно, если функция $f(x) = 1/\alpha(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то для всякого $R > 0$ существует число $\delta = \delta(R) > 0$ такое, что

$$(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| = |\frac{1}{\alpha(x)}| > R\right).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выбирая здесь $R = \varepsilon^{-1}$, получим высказывание

$$(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{1}{R} = \varepsilon\right),$$

означающее, что функции $\alpha(x) = o(1)(x \to x_0)$. Теорема доказана.

Например, функция $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^{-1}$ является бесконечно большой при $x \to -1$, так как функция $\alpha(x) = x^2 + 2x + 1$ является бесконечно малой при $x \to -1$.

Используя эту теорему, можно доказать истинность следующих операций над бесконечно большими функциями:

$$5^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \infty;$$

$$6^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty) \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty(-\infty)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = +\infty(-\infty);$$

$$7^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty) \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty(+\infty)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = +\infty(-\infty);$$

$$8^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = P_{\neq\infty}^{\neq 0} \wedge \alpha(x) = o(1)(x\to x_0) \wedge \alpha(x) \neq 0 \forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta_0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\alpha(x)} - \text{ÁÁÔ}(x \to x_0)\right).$$

И, наконец, отметим ещё ряд свойств, связанных с пределами функций.

Теорема 1.8 (о пределе промежуточной функции)**.** *Пусть в некоторой окрестности* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *точки* $x = x_0$ *выполняются неравенства* $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ *и пусть, кроме того, крайние функции имеют пределы в точке* $x = x_0$ *и эти пределы равны друг другу, т. е.*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\psi(x) = P.$$

Тогда существует предел промежуточной функции и он равен P, *т. е.* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P.$

Теорема 1.9. *Пусть в некоторой окрестности* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *точки* $x = x_0$ *выполняются неравенства* $\varphi(x) \leq f(x)$ *и пусть существуют пределы*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = P_1, \lim_{x\to x_0} f(x) = P_2.$$

Тогда $P_1 \leq P_2$ (докажите это утверждение самостоятельно).

Теорема 1.10 (о знаке предела). *Если в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *точки* $x = x_0$ *функция* $f(x)$ *удовлетворяет неравенству* $f(x) \geq c > 0\big(f(x) \leq -c < 0\big)$, *где* c *— постоянная, и существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P$, *то* $P > 0$ *(соответственно* $P < 0$*).*

В тех случаях, когда при вычислении того или иного предела непосредственный переход к пределу при $x \to x_0$ приводит к одному из символов типа

$$\infty - \infty, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty,$$

возникает ситуация, в которой становятся неприменимы теоремы об арифметических действиях над пределами. В этом случае говорят, что при вычислении предела возникла *неопределенность* соответствующего типа, препятствующая вычислению предела. Эта неопределенность может быть снята после некоторых тождественных преобразований или применения тех или иных формул. При этом говорят, что тождественные преобразования (или формулы) позволяют *раскрыть неопределенность*. Поясним сказанное примером.

Пусть требуется вычислить предел $P=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x}{\operatorname{tg}^2 x}$. Если в указанном отношении мы сразу же перейдем к пределу, то получим неопределенность типа $0/0$. Что скрывается под этим символом, мы пока не знаем. Попробуем избавиться от неопределенности. Применим для этого формулы 1 и 2 таблицы 1.1 эквивалентных бесконечно малых и теорему 1.5. Получим

$$P=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{\operatorname{tg}^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2}\underset{x\to 0}{=}\lim 1=1$$

Для усвоения изложенной теории рекомендуем выполнить задачи из типового расчета «Пределы», помещённого в конце пособия.

Контрольные вопросы

1. Что такое функция? Какими способами можно задать функцию? Как описывается область определения функции, заданной аналитически?

2. Как определяется предел функции в точке? Какими свойствами обладает предел? Как связан предел функции в точке с ею ограниченностью в этой точке?

3. Какие функции называются бесконечно малыми? Как связаны бесконечно малые функции с пределом функции в точке?

4. Как формулируются теоремы об арифметических действиях над пределами?

5. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными? Как используются бесконечно малые при вычислении пределов?

6. Перечислите все формулы эквивалентности для основных элементарных функций.

7. В чем состоит различие классов $O(1)$ и $o(1)(x\to x_0)$? Какими свойствами обладают эти классы?

8. Какие функции называются бесконечно большими и какова их связь с бесконечно малыми функциями?

9. Докажите формулы

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha\cdot x(x\to 0;\alpha=\text{const})$ и $a^x-1\sim x\cdot\ln a\left(x\to 0;a_{\neq 1}^{>0}=\text{const}\right)$.

10. Пусть существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=P$. Вытекает ли из неравенства $f(x)>0\left(\forall x\in\dot{U}_{x_0}(\delta)\right)$ неравенство $P>0$?

11. Говорят, что бесконечно малая функция $\alpha(x)$ имеет порядок m

относительно бесконечно малой $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^m(x)} = K_{\neq\infty}^{\neq 0}$. При этом пишут: $\alpha(x) = O^*(\beta(x))(x \to x_0)$. Найти порядок малости функций

$$2\sin^4 x - x^5;\ \sqrt{\sin^2 x + x^4};\ \sqrt{1+x^4} - 1;\ \mathrm{tg}x + x^2; \ln(1+x^3)$$

относительно бесконечно малой $\beta(x) = x(x \to 0)$